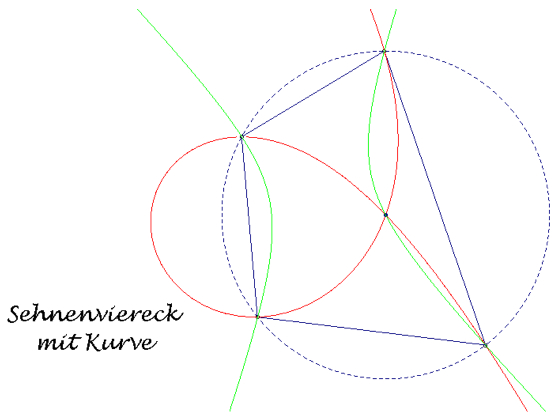
Eine kubische Kurve des Sehnenvierecks

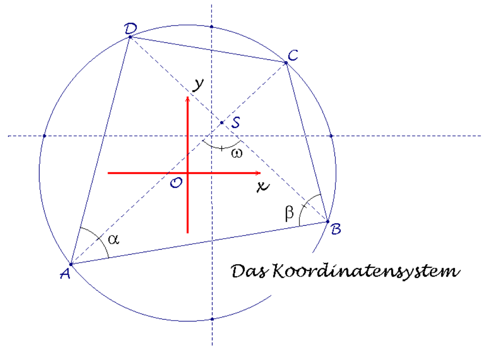
Eckart Schmidt

Zu einem Sehnenviereck liegt es nahe, den Kegelschnitt durch die Ecken und die Umkreismitte zu betrachten. Spiegelt man diesen Kegelschnitt am Umkreis, so erhält man eine anallagmatische Kurve dritter Ordnung, die Gegenstand dieser Ausarbeitung ist. Als Spezialfall ergibt sich z.B. eine Strophoide. – Gearbeitet wird weitgehend in einem kartesischen Koordinatensystem, das dem Sehnenviereck angepasst ist. Abschließend wird die Kurve in baryzentrischen Koordinaten behandelt. Die Berechnungen lassen sich nur PC-gestützt bewältigen.



Die Kurvengleichung

Das Sehnenviereck *ABCD* sei konvex, dem Einheitskreis einbeschrieben sowie durch die Innenwinkel a , b mit $a \leq b < 90°$ und den Diagonalenschnittwinkel w beschrieben. Keine Seite und keine Diagonale sei ein Durchmesser, da dann die spätere Kurve uninteressant entartet. Der Ursprung des Koordinatensystems liege in der Umkreismitte *O* und die Achsen seien parallel zu den orthogonalen Bogenmittendiagonalen.



In diesem Koordinatensystem können den Ecken des Sehnenvierecks folgende Koordinaten gegeben werden:

$$A(-\cos(b-\frac{w}{2});-\sin(b-\frac{w}{2}),\quad B(\cos(a-\frac{w}{2});-\sin(a-\frac{w}{2}),$$

$$C(-\cos(b+\frac{w}{2});\sin(b+\frac{w}{2}),\quad D(\cos(a+\frac{w}{2});\sin(a+\frac{w}{2}).$$

Der Diagonalenschnitt S liegt dann z.B. bei

$$S(\frac{\cos a-\cos b}{2\cos(w/2)};\frac{\cos a+\cos b}{2\sin(w/2)})$$

und die Seitenlängen errechnen sich zu

$$a=2\cos(\frac{a+b-w}{2}),\quad b=2\cos(\frac{a-b-w}{2}),$$

$$c=-2\cos(\frac{a+b+w}{2}),\quad d=2\cos(\frac{a-b+w}{2})\,.$$

Wie eingangs erwähnt, wird zu diesem Sehnenviereck ein Umkegelschnitt durch die Umkreismitte betrachtet. Dieser Kegelschnitt hat die Gleichung

$$x^2(1-2\cos a\cos b+\cos w)+y^2(-1-2\cos a\cos b+\cos w)$$

$$+2x(-\cos a+\cos b)\cos\frac{w}{2}+2y(\cos a+\cos b)\sin\frac{w}{2}=0\ .$$

Spiegelt man diesen Kegelschnitt dann am Umkreis entsprechend der Zuordnung

$$(x;y)\quad\to\quad(\frac{x}{x^2+y^2};\frac{y}{x^2+y^2})\quad,$$

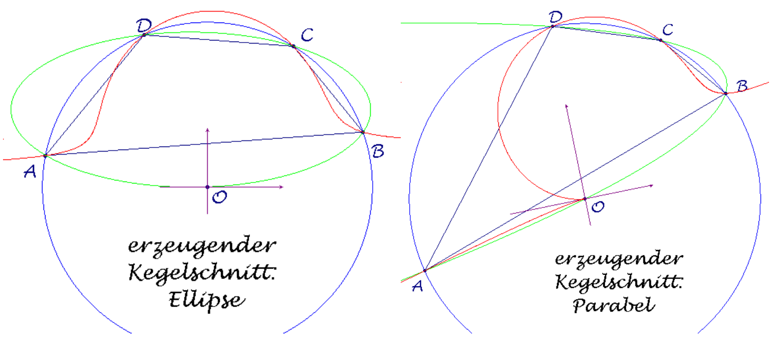
so erhält man eine Kurve dritter Ordnung mit der Gleichung

$$x^2-y^2+(x^2+y^2)(-2x(\cos a-\cos b)\cos(w/2)$$

$$+2y(\cos a+\cos b)\sin(w/2)-2\cos a\cos b+\cos w)=0$$

oder in Polarkoordinaten

$$r(j)=\frac{\cos w-2\cos a\cos b+\cos 2j}{2(\cos a\cos(j+\frac{w}{2})-\cos b\cos(j-\frac{w}{2}))}\ .$$



Der erzeugende Kegelschnitt kann eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse sein, je nachdem $\cos a\cos b$ kleiner, gleich oder größer als $\cos^2(w/2)$ ist. Daraus resultieren für die Kurve drei verschiedene Formen. Zur Veranschaulichung sei die schon eingangs gezeigte Schleifenform bei erzeugender Hyperbel bevorzugt.

Achsen- und Seitenschnitte der Kurve

Die Achsenschnitte der betrachteten Kurve liegen bei

$$P(p;0) = P(\frac{1-2\cos a\cos b+\cos w}{2(\cos a-\cos b)\cos(w/2)};0)\ ,$$

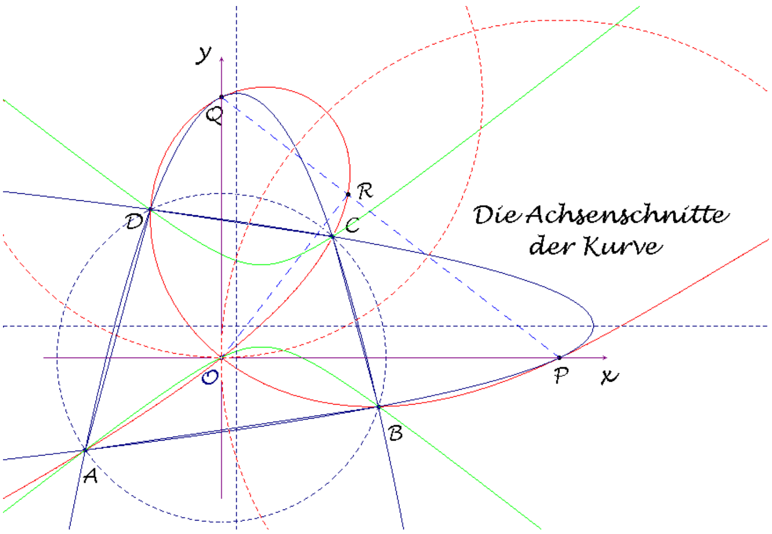
$$Q(0;q) = Q(0;\frac{1+2\cos a\cos b-\cos w}{2(\cos a+\cos b)\sin(w/2)})\ .$$

Diese Achsenschnitte P und Q sind auch die Achsenschnitte der Umparabeln des Sehnenvierecks mit den Gleichungen

$$y^2 - y\sin(w/2)(\cos a+\cos b)+x\cos(w/2)(\cos a-\cos b) + \cos a\cos b-\cos^2(w/2)=0\ ,$$

$$x^2 - x\cos(w/2)(\cos a-\cos b)+y\sin(w/2)(\cos a+\cos b) - \cos a\cos b-\sin^2(w/2)=0\ ,$$

deren Symmetrieachsen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Darüber hinaus sind P und Q nicht nur gemeinsame Achsenschnitte sondern auch Berührpunkte der Umparabeln mit der Kurve.



Zeichnet man um die Achsenschnitte P und Q Kreise durch die Umkreismitte, so erweist sich die Kurve invariant bzgl. Spiegelungen an diesen Kreisen, so dass die Kurve als anallagmatische Kurve angesprochen werden kann ([1], S.28).
Ergänzt sei: Lotet man von der Umkreismitte O auf die Verbindungsgerade PQ der Achsenschnitte, so erhält man einen weiteren Kurvenpunkt R. Dieser Punkt ist die Spiegelung von P am Inversionskreis um Q bzw. die Spiegelung von Q am Inversionskreis um P.

Betrachtet man die Seitenschnitte der Kurve

$$S_a(-\frac{\sin\frac{a+b-w}{2}}{2\sin\frac{a-b}{2}};-\frac{\sin\frac{a+b-w}{2}}{2\cos\frac{a-b}{2}})\ ,$$

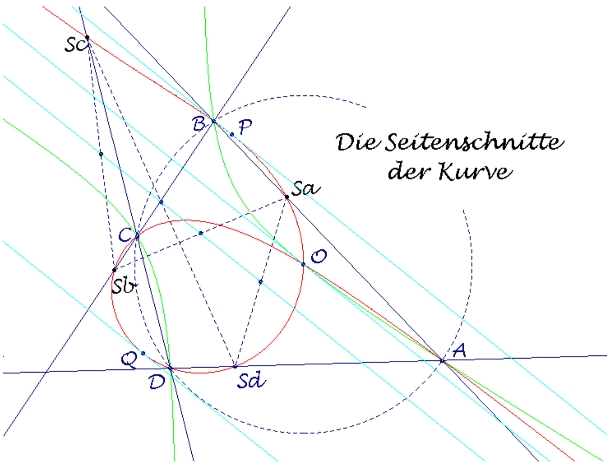
$$S_b\left(-\frac{\sin\frac{a-b-w}{2}}{2\sin\frac{a+b}{2}};-\frac{\sin\frac{a-b-w}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}}\right),$$

$$S_c\left(-\frac{\sin\frac{a+b+w}{2}}{2\sin\frac{a-b}{2}};\frac{\sin\frac{a+b+w}{2}}{2\cos\frac{a-b}{2}}\right),$$

$$S_d\left(-\frac{\sin\frac{a-b+w}{2}}{2\sin\frac{a+b}{2}};\frac{\sin\frac{a-b+w}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}}\right),$$

so erhält man ein einbeschriebenes Viereck des Sehnenvierecks mit kollinearen Seitenmitten auf einer Geraden mit der Gleichung

$$y=\frac{(\cos a-\cos b)\cot(w/2)}{(\cos a+\cos b)}x+\frac{\cos a\cos b-\cos w}{2(\cos a+\cos b)\sin(w/2)}.$$



Die Steigung dieser Geraden

$$m=\frac{(\cos a-\cos b)\cot(w/2)}{(\cos a+\cos b)}$$

ist die Steigung der Kurve in den Achsenschnitten P und Q als auch die Steigung des Umkegelschnitts in der Umkreismitte und damit die Steigung der Asymptoten.

Die Strophoide als Spezialfall

Betrachtet man ein Sehnentrapez (a=b), so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$x^2-y^2+(x^2+y^2)(-2\cos^2 a+\cos w+4y\cos a\sin(w/2))=0\ .$$

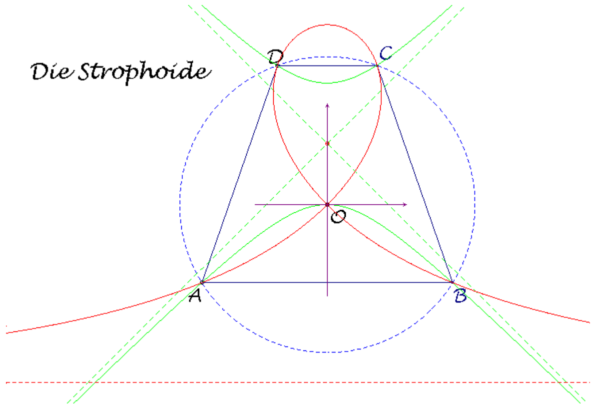
Die Kurve verläuft symmetrisch zur y-Achse und hat eine Asymptote parallel zur x-Achse.

Ist der erzeugende Kegelschnitt darüber hinaus eine gleichseitige Hyperbel, so ist das hier betrachtete Inverse bekanntlich eine Strophoide ([1], S.25). Dies ist der Fall für

$$\cos w=2\cos^2 a\quad (a>60°)\ .$$

Damit lässt sich die Gleichung der Strophoide in bekannter Form angeben:

$$x^2 = -y^2 \frac{2y\cos a\sqrt{-2\cos(2a)}-1}{2y\cos a\sqrt{-2\cos(2a)}+1} \ .$$



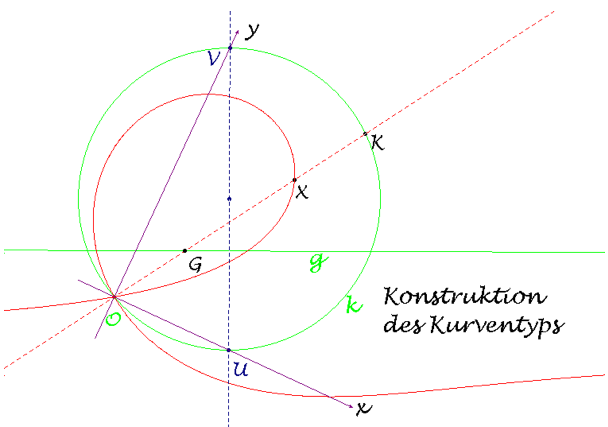
Der y-Achsenabschnitt der Strophoide beträgt

$$q = \frac{1}{2\cos a\sqrt{-2\cos(2a)}}$$

und die Asymptote hat die Gleichung $y = -q$.

Konstruktionsmöglichkeit des Kurventyps

Es wird eine gemeinsame Erzeugungsweise von Zissoide, Strophoide und Trisektrix verallgemeinert ([1], S.50), die der untersuchten Kurve angepasst werden kann.
Ausgangspunkt ist eine Gerade g und ein Kreis k mit einem Umfangspunkt O. Betrachtet man jetzt Geraden durch O, die die Gerade g in G und den Kreis k in K schneiden, und trägt die Strecke GK von O auf dieser Geraden ab, so ergeben die Endpunkte eine Ortslinie.



Dieser Konstruktion sei folgendes Koordinatensystem unterlegt: Schneidet die Senkrechte zur Geraden g durch die Kreismitte den Kreis k in den Punkten U und V, so seien OU und OV die Koordinatenachsen. Gibt man U und V die Koordinaten

$$U(u;0) \quad und \quad V(0;v) \, ,$$

so erhält der Kreis die Gleichung

$$k: \qquad x^2 - ux + y^2 - vy = 0 \ .$$

Kennzeichnet man die Lage der Geraden g durch das Teilverhältnis k, in dem sie die Strecke UV teilt, so hat sie die Gleichung

$$g: \qquad y = \frac{u}{v}x - \frac{u^2 - v^2 k}{v(1+k)} \ .$$

Damit errechnen sich die Schnitte einer Ursprungsgeraden der Steigung m mit g und k zu

$$G\left(\frac{u^2 - v^2 k}{(1+k)(u - vm)}; \frac{(u^2 - v^2 k)m}{(1+k)(u - vm)}\right) \ ,$$

$$K\left(\frac{u + vm}{1 + m^2}; \frac{(u + vm)m}{1 + m^2}\right) \ .$$

Durch Abtragen der Strecke GK vom Ursprung aus erhält man den Punkt

$$X(x;y) = X\left(\frac{(u^2+v^2)(k - m^2)}{(1+k)(u - vm)(1+m^2)}; \frac{(u^2+v^2)(k - m^2)m}{(1+k)(u - vm)(1+m^2)}\right) \ ,$$

aus dessen Koordinaten man durch Eliminieren der Steigung m die Gleichung der Ortslinie erhält:

$$(ux^3 - vy^3)(1+k) - xy(vx - uy)(1+k) + (u^2+v^2)(y^2 - x^2 k) = 0 \ .$$

Wählt man jetzt

$$u = \frac{(\cos a - \cos b)\cos(w/2)}{\cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a \cos b \cos w} \ ,$$

$$v = \frac{(\cos a + \cos b)\sin(w/2)}{\cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a \cos b \cos w} \ ,$$

$$k = \frac{1 + \cos w - 2\cos a \cos b}{1 - \cos w + 2\cos a \cos b} \ ,$$

so erhält man die Gleichung der eingangs diskutierten Kurve.

Eigenschaften des Kurventyps

Aus der Sichtweise der gerade skizzierten Kreis-Geraden-Konstruktion des Kurventyps und der obigen Gleichung

$$(ux^3 - vy^3)(1+k) - xy(vx - uy)(1+k) + (u^2+v^2)(y^2 - x^2 k) = 0$$

lässt sich die Kurve einfacher diskutieren.
So lautet die Gleichung in Polarkoordinaten

$$r(j) = \frac{(u^2+v^2)(k\cos^2 j - \sin^2 j)}{(1+k)(u\cos j - v\sin j)} \ ,$$

und die Achsenschnitte ergeben sich zu

$$P(p;0) = P\left(\frac{(u^2+v^2)k}{u(1+k)};0\right) \quad und \quad Q(0,q) = Q\left(0,\frac{u^2+v^2}{v(1+k)}\right) \ .$$

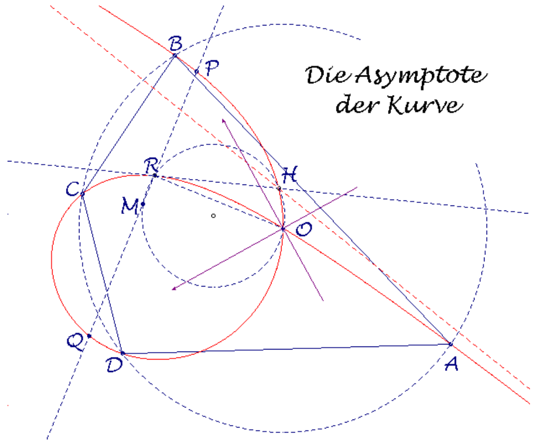
Lotet man vom Ursprung auf die Verbindungsgerade PQ der Achsenschnitte, so ergibt sich ein weiterer Kurvenpunkt (s.o.)

$$R\left(\frac{u(u^2+v^2)k}{(1+k)(u^2+v^2k^2)}; \frac{v(u^2+v^2)k^2}{(1+k)(u^2+v^2k^2)}\right) \ .$$

Die Asymptote verläuft senkrecht zu der Verbindungsgeraden UV mit der Steigung $\frac{u}{v}$ und schneidet die Kurve in dem Punkt

$$H\left(\frac{-u^2+v^2k}{2u(1+k)};\frac{u^2-v^2k}{2v(1+k)}\right) ,$$

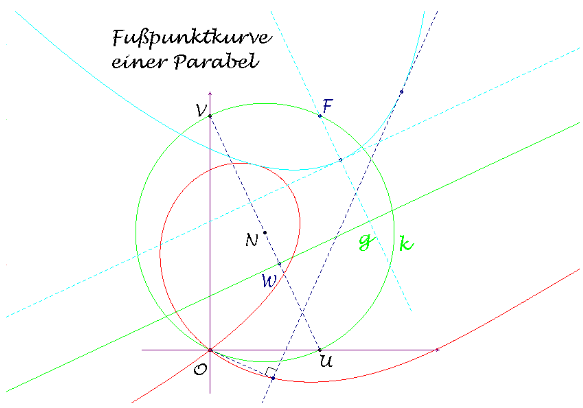
dem Mittelpunkt der Achsenabschnitte der Asymptote. Der Punkt H ist der weitere Kurvenschnitt der Tangente in R und liegt auf dem Neun-Punkte-Kreis des Dreiecks PQO diametral zu der Mitte von U und V.



Die Herleitung der Kurvengleichung aus der Kreis-Geraden-Konstruktion enthält auch eine Parameterdarstellung der Kurvenpunkte, mit der sich weitere Eigenschaften der Kurve erschließen lassen. So ist die Kurve als anallagmatische Kurve auch Fußpunktkurve einer Parabel mit der Gleichung

$$(1+k)^2(vx+uy)^2-4(1+k)(u^2+v^2)(ux+kvy)+4k(u^2+v^2)^2=0 .$$

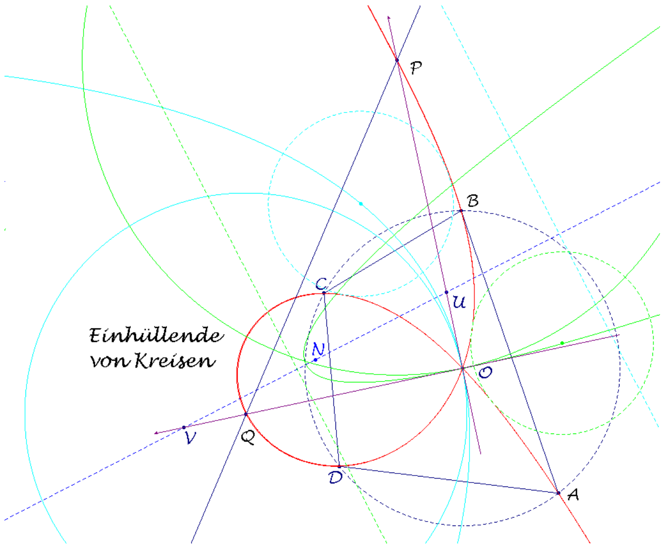
Spiegelt man den Ursprung O an der Mitte N des erzeugenden Kreises k, erhält man den Brennpunkt $F(u;v)$;spiegelt man die erzeugende Geraden g, so erhält man die Scheiteltangente. Lotet man vom Ursprung O auf die Tangenten dieser Parabel, so erhält man die Kurve. Der Brennpunkt F ist auch Punkt des Umkreises des Dreiecks PQO, genauer das PQO-isogonale Bild des Fernpunktes der Asymptoten.



Auch eine weitere Eigenschaft anallagmatischer Kurven kann aufgezeigt werden: Die Kurve ist in zweifacher Hinsicht

Einhüllende von Kreisen, deren Mitten auf einer Parabel liegen und die einen festen Kreis senkrecht schneiden. Diese festen Kreise müssen die Inversionskreise um *P* und *Q* durch den Ursprung *O* sein. Die zugehörigen Mittenparabeln gehen ebenfalls durch den Ursprung *O*, haben ihren Brennpunkt in der Mitte *N* von *U* und *V* und ihre Achse ist *UV*. Die Parabelgleichungen ergeben sich zu

$$v^2x^2 + u^2y^2 - 2ux(u^2 + v^2 - vy) = 0,$$
$$v^2x^2 + u^2y^2 - 2vy(u^2 + v^2 - ux) = 0.$$



Eine weitere Konstruktionsmöglichkeit

Auch ausgehend von dem rechtwinkligen Dreieck *OPQ* mit dem Höhenfußpunkt *R* lässt sich die Kurve beschreiben und konstruieren, wenn man eine Richtung m für die Asymptote vorgibt.
Spiegelt man die Punkte

$$P(p;0),\quad Q(0;q),\quad R\left(\frac{pq^2}{p^2+q^2};\frac{p^2q}{p^2+q^2}\right)$$

an einem Kreis um *O* vom Radius *r*, und betrachtet zu den Bildpunkten *P´*, *Q´*, *R´* einen Kegelschnitt durch *O* mit der Steigung m, dann liefert eine Rückspiegelung an dem Kreis die Kurve. Folgt man dieser Konstruktion analytisch, so ergibt sich die Kurvengleichung – unabhängig von *r* – zu

$$pq(m^2x^2 - y^2) - (m^2qx - py)(x^2 + y^2) = 0\ .$$

Wählt man für die Asymptotensteigung m die Steigungen der Geraden *OP*, *OQ*, *OR*, so entartet die Kurve zu einem Kreis und einer Geraden. Für die Steigung $m = \dfrac{p}{q}$ der Seitenhalbierenden *OM* des rechtwinkligen Dreiecks *OPQ* wird der erzeugende Kegelschnitt zu einer gleichseitigen Hyperbel und man erhält eine Strophoide mit der Gleichung

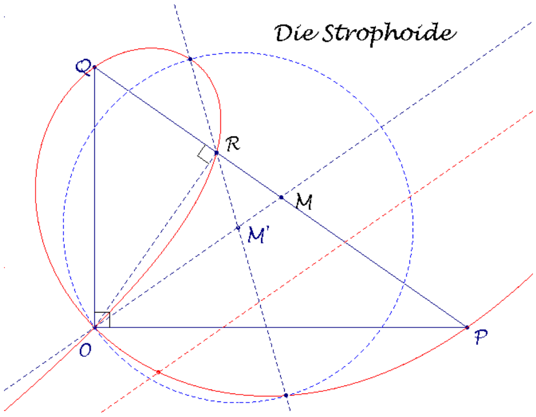
$$q^3x(x^2 + y^2 - px) - p^3y(x^2 + y^2 - qy) = 0$$

oder in Polarkoordinaten

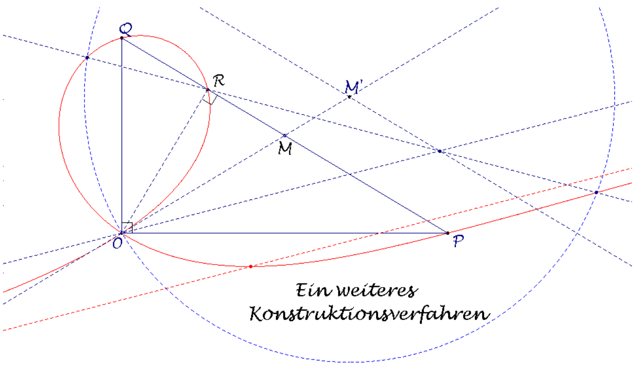
$$r = \frac{pq(p^2 \sin^2 j - q^2 \cos^2 j)}{p^3 \sin j - q^3 \cos j} \quad .$$

Zurückblickend auf die Sehnenvierecke ist dies der Fall, wenn

$$\cos w = 2 \cos a \cos b \quad .$$



Für diese Strophoide gibt es eine einfache Konstruktionsmöglichkeit [2]: Zeichnet man zu Punkten *M´* auf der Seitenhalbierenden *OM* einen Kreis durch *O* und eine Gerade durch *R*, dann schneiden sich Kreis und Gerade auf der Kurve. Dieses Konstruktionsverfahren lässt sich für die Kurve verallgemeinern: Zu Punkten *M´* auf *OM* wird wieder ein Kreis durch *O* gezeichnet. Dieser Kreis wird auch wieder mit einer Geraden durch *R* zum Schnitt gebracht. Dazu verbindet man *R* mit dem Schnitt der Parallelen zu *PQ* durch *M´* und zur Asymptoten durch *O*.



Die *u*-*v*-*k*-Ergebnisse des vorigen Abschnitts können hier übernommen werden, wenn man folgende Ersetzungen vornimmt:

$$u = \frac{m(mp+q)}{1+m^2}, \quad v = \frac{mp+q}{1+m^2}, \quad k = \frac{mp}{q} \quad .$$

Baryzentrische Koordinaten

Abschließend sei eine Zusammenschau der Geometrie der Kurve in baryzentrischen Koordinaten versucht. Die Punktbezeichnungen werden beibehalten. Dazu ist ein geeignetes Bezugsdreieck aufzuzeigen. Es bietet sich – vom symmetrischen Fall abgesehen – das rechtwinklige Dreieck *PQO*, das aus Kurvenpunkten besteht, als Bezugsdreieck an

$$\text{mit } OQ = q, \quad OP = p, \quad PQ = \sqrt{p^2 + q^2}\ .$$

Damit errechnet sich der Fußpunkt R des Lotes von O auf PQ zu

$$R(q^2, p^2, 0)\,.$$

Gibt man dem Fernpunkt der Kurve die Darstellung

$$F_\infty(s, t, -s-t)\ ,$$

dann erhält man die Kurvengleichung nach den gleichen Überlegungen wie im vorigen Abschnitt zu

$$(s+t)(p^2 x - q^2 y)xy + (t\ p^2 x^2 - s\ q^2 y^2)z = 0\ .$$

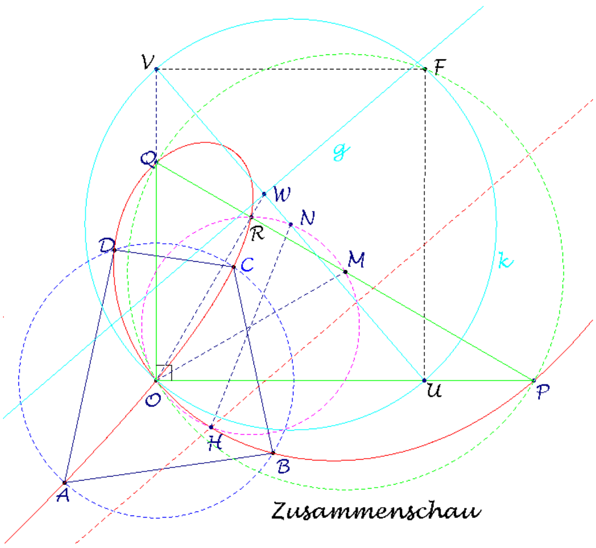
Anzumerken ist, dass die Kurvengleichung den Radius r des Spiegelungskreises nicht enthält. Jedes Sehnenviereck aus Schnitten der Kurve mit einem Kreis um O, erzeugt wieder die Kurve.

Die Kurve erweist sich als isogonales Bild eines Kreises (s.u.), dabei wird der Fernpunkt F_∞ abgebildet auf den Punkt

$$F((s+t)t\ q^2, (s+t)s\ p^2, -s\,t\,(p^2+q^2))\ .$$

Dieser Punkt ist der Schnitt der Thaleskreise über *PQ* und *UV*. Lotet man von F auf die Seiten *OP* und *OQ*, so erhält man die Punkte

$$U(t\,(s+t)q^2, 0, s\,(s\ p^2 - t\ q^2))\ ,$$
$$V(0, s\,(s+t)\,p^2, -t\,(s\ p^2 - t\ q^2))\ .$$



Die Mitte von *UV*, bzw. *OF* ist der Mittelpunkt N des erzeugenden Kreises k der Kreis-Geraden-Konstruktion der Kurve:

$$N(t\,(s+t)q^2, s\,(s+t)\,p^2, (s-t)(s\ p^2 - t\ q^2))\ .$$

Die erzeugende Gerade g der Kreis-Geraden-Konstruktion schneidet die Gerade *UV* senkrecht im Punkt W auf der Geraden *OR:*

$$W(s\ t\ q^2, s\ t\ p^2, (s-t)(s\ p^2 - t\ q^2))\ .$$

Auf dem Feuerbach-Kreis des Bezugsdreiecks *PQO* mit der Gleichung

$$p^2(x^2-xy-xz)+q^2(y^2-xy-yz)=0$$

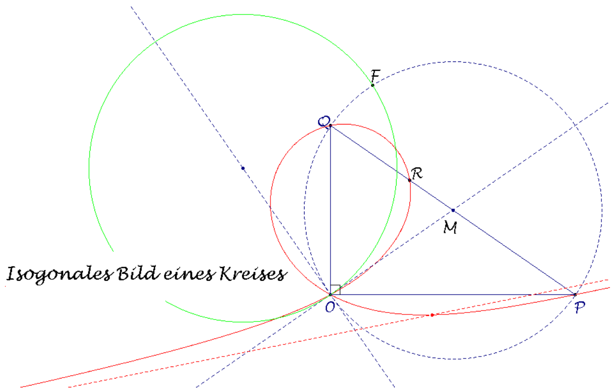
liegen nicht nur die Punkte *O, R, N* und die Mitte *M(1,1,0)* von *PQ*, sondern auch diametral zu *N* der Schnitt *H* der Asymptoten mit der Kurve:

$$H(s\,(s\;p^2-t\;q^2),-t\,(s\;p^2-t\;q^2),(s\;+t\,)(s\;p^2+t\;q^2))\ .$$

Auch der Schnitt der Geraden *UV* mit der Asymptoten liegt auf diesem Feuerbach-Kreis.

Ist $s\;=t$, erhält man die Strophoide mit der Gleichung

$$p^2x^2(2y+z)-q^2y^2(2x+z)=0\ .$$

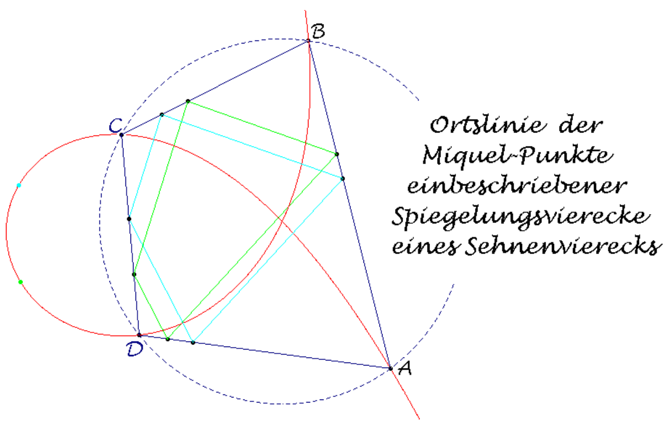


Ergänzend läßt sich die Kurve auch als isogonales Bild eines Kreises betrachten. Dieser Kreis schneidet den Umkreis des Bezugsdreiecks *PQO* orthogonal in *O* und *F* und hat die Gleichung

$$(p^2+q^2)(s\;p^2x^2-t\;q^2y^2)+(s\;+t\,)p^2q^2(x-y)z=0\ .$$

Im Fall der Strophoide ist dieser Kreis der Apollonius-Kreis des Bezugsdreiecks über der Seite *PQ*.

Eine Anwendung



Abschließend sei die Kurve als Ortslinie einer geometrischen Fragestellung aufgezeigt: Betrachtet man die Seiten eines Sehnenvierecks als Spiegel und in diesem Spiegelsystem geschlossene Lichtwege, dann liegen die Miquel-Punkte dieser einbeschriebenen Spiegelungsvierecke auf der behandelten Kurve.

Literatur

[1] H. Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven. – Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden, 1949.

[2] E. Schmidt: Strophoiden. – http://eckartschmidt.de

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de